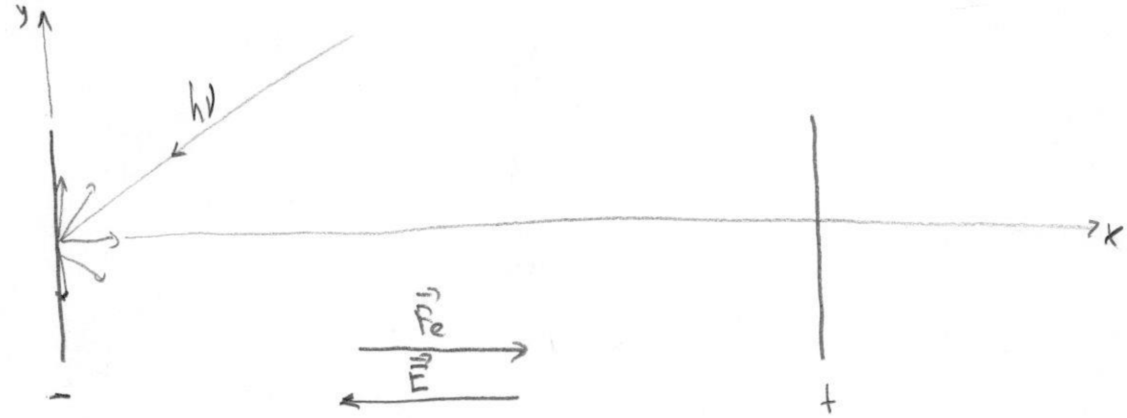
Зрачење аргонског ласера је фокусирано у центар равне фотокатоде вакумског фотоелемента. Између равне аноде, паралелне фотокатоди, и фотокатоде прикључен је сталан напон U. Излазни рад електрона из фотокатоде износи A, таласна дужина зрачења ласера износи λ, док је D растојање аноде и фотокатоде. Одредити полупречник круга r на аноди, у који падају фотоелектрони када електрично поље извора убрзава фотоелектроне.



$$\vec{E} = -E\vec{e}_x \qquad h\nu = A + T$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

$$\vec{F} = -e\cdot(-E)\vec{e}_x \qquad \frac{mv^2}{2} = h\nu - A$$

$$\vec{F} = eE\vec{e}_x \qquad v = \sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m}}$$

Од интереса су e^- који излазе почетном брзином готово паралелном катоди. Они ће стићи најдаље од осе

$$\vec{v}_0 = v\vec{e}_y$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F_i}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eE$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}E$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m}E$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$dv_x = \frac{e}{m}E\,dt \quad \Big|\int$$

$$dv_y = 0 \quad \Big|\int$$

$$v_x = \frac{e}{m}Et + C_1$$

$$v_y = C_2$$

$t=0 \quad v_x = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$t=0 \quad v_y = v_0 \Rightarrow C_2 = v_0$

$$v_x = \frac{e}{m}Et$$

$$v_y = v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{m}Et$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0$$

$$dx = \frac{e}{m}Et\,dt \quad \Big|\int$$

$$dy = v_0\,dt \quad \Big|\int$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2 + C_3$$

$$y = v_0 t + C_4$$

$t=0;\ x=0 \Rightarrow C_3=0$

$t=0;\ y=0 \Rightarrow C_4=0$

$$x = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$$

$$y = v_0 t$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$$

$$y = \sqrt{\frac{2(h\nu-A)}{m}}\,t$$

$x = D \Rightarrow y = r$

$$D = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$$

$$r = \sqrt{\frac{2(h\nu-A)}{m}}\,t$$

$$t = r\sqrt{\frac{m}{2(h\nu-A)}}$$

$$D = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\,r^2\frac{m}{2(h\nu-A)}$$

$$r = \sqrt{\frac{4\cancel{m}D(h\nu-A)}{eE\cancel{m}}}$$

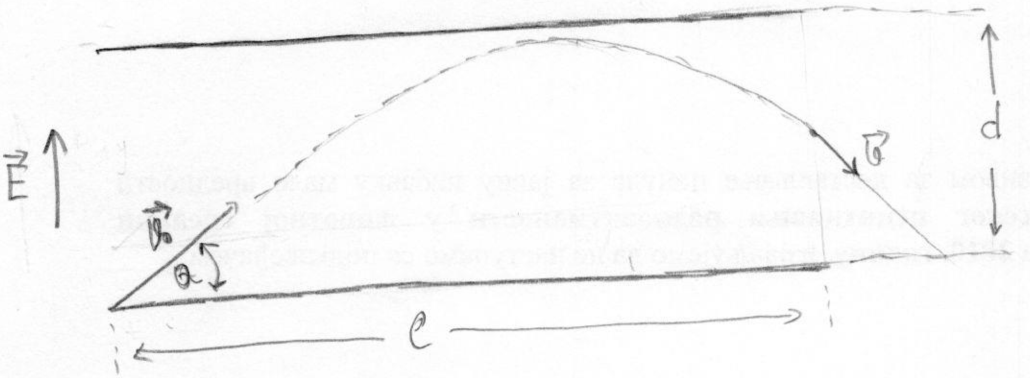
$$r = \sqrt{\frac{4D(h\nu-A)}{eE}}$$

$$E = \frac{U}{D}$$

$$r = \sqrt{\frac{4D(h\nu-A)}{e\frac{U}{D}}}$$

$$r = 2D\sqrt{\frac{(h\frac{c}{\lambda}-A)}{eU}}$$

Сноп електрона енергије E_k улази у хомогено електрично поље ~~[illegible]~~ јачине E, као на слици.
Колико треба да буде растојање између плоча, d, да не ударе у горњу плочу кондензатора? Израчунати колика мора бити дужина плоча l, да би e^- напустили кондензатор. Одредити угао под којим e^- напуштају кондензатор.

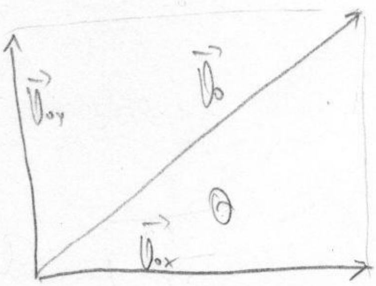


$$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\vec{E} = E\vec{e}_y$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

$$\vec{F}_e = -eE\vec{e}_y$$



$$v_{ox} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{oy} = v_0 \sin\theta$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-eE$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-eE \qquad m\frac{d\vartheta_y}{dt}=-eE$$

$$d\vartheta_y=-\frac{eE}{m}dt \quad /\int$$

$$\frac{d\vartheta_x}{dt}=0 \qquad \vartheta_y=-\frac{eE}{m}t+C$$

$$\vartheta_x=\text{const} \qquad t=0 \quad \vartheta_y=\vartheta_{oy} \Rightarrow C=\vartheta_{oy}$$

$$t=0 \quad \vartheta_x=\vartheta_{ox}$$

$$\text{const}=\vartheta_{ox} \qquad \vartheta_y=-\frac{eE}{m}t+\vartheta_{oy} \,//$$

$$\vartheta_x=\vartheta_{ox} \,//$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{eE}{m}t+\vartheta_{oy}$$

$$\frac{dx}{dt}=\vartheta_{ox} \qquad dy=-\frac{eE}{m}t\,dt+\vartheta_{oy}dt \quad /\int$$

$$dx=\vartheta_{ox}dt \qquad y=-\frac{1}{2m}eEt^2+\vartheta_{oy}t+C$$

$$x=\vartheta_{ox}t+C \qquad t=0 \quad y=0 \quad C=0$$

$$t=0 \quad x=0 \quad C=0$$

$$x=\vartheta_{ox}t \,// \qquad y=\vartheta_{oy}t-\frac{1}{2m}eEt^2 \,//$$

када $\bar{e}$ дође до горње плоче треба да је

$$v_y = 0$$

$$0 = -\frac{eE t_d}{m} + v_{0y}$$

$$v_{0y} = \frac{eE t_d}{m}$$

$$t_d = \frac{v_{0y} m}{eE}$$

$$d = v_{0y} t_d - \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t_d^2$$

$$d = v_{0y} \frac{v_{0y} m}{eE} - \frac{1}{2} \frac{\cancel{eE}}{\cancel{m}} \frac{v_{0y}^2 m^{\cancel{2}}}{e^{\cancel{2}} E^{\cancel{2}}}$$

$$d = \frac{v_{0y}^2 m}{eE} - \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2 m}{eE}$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2 m}{eE}$$

$$\underline{d = \frac{m v_{0y}^2}{2eE}}$$

$\bar{e}$ ће ударити у доњу плочу када је $y=0$

$$v_{0y}t - \frac{1}{2m}eEt^2 = 0$$

$$t\left(v_{0y} - \frac{eE}{2m}t\right) = 0$$

$$t_1 = 0 \qquad v_{0y} - \frac{eE}{2m}t_v = 0$$

$$\frac{eE}{2m}t_v = v_{0y}$$

$$t_v = \frac{2mv_{0y}}{eE}$$

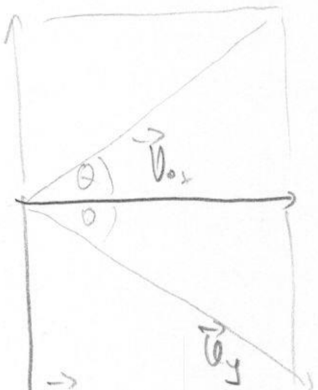
за време t_v по x-оси ће прећи растојање l

$$x_1 = v_{0x}\,t_v$$

$$x_l = v_{0x}\,\frac{2mv_{0y}}{eE}$$

$$x_l = \frac{2mv_{0x}v_{0y}}{eE}$$

1° $l > x_l$ удариће у доњу плочу кондензатора



$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = -\frac{e}{m}Et_v + v_{0y}$$

$$v_y = -\frac{\cancel{e}}{\cancel{m}}E\,\frac{2\cancel{m}v_{0y}}{\cancel{e}E} + v_{0y}$$

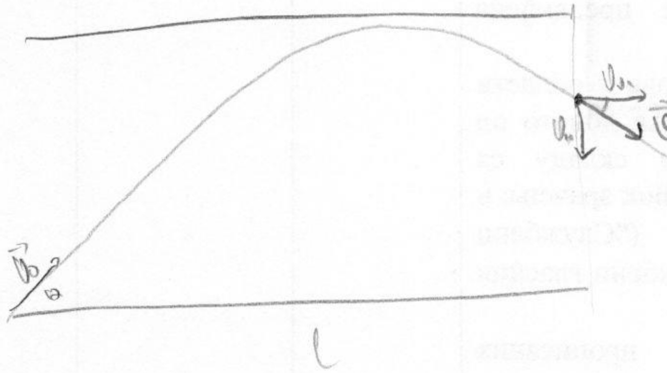
$$v_y = -2v_{0y} + v_{0y}$$

$$v_y = -v_{0y}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-v_{0y}}{v_{0x}} = -\operatorname{tg}(\theta)$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(-\theta) \qquad \theta_1 = -\theta$$

$2^\circ \quad l < x_l$



$$x = l = v_{0x} t_l$$

$$t_l = \frac{l}{v_{0x}}$$

$$v_x(t_l) = v_{0x}$$

$$v_y(t_l) = -\frac{eE}{m} t_l + v_{0y}$$

$$v_y(t_l) = -\frac{eE}{m}\frac{l}{v_{0x}} + v_{0y}$$

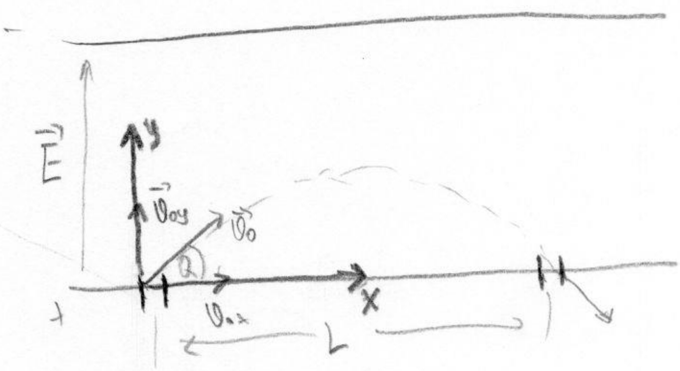
$$v_y(t_l) = v_{0y} - \frac{eEl}{m v_{0x}}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v_{y}(t_l)}{v_x(t_l)} = \frac{v_{0y} - \frac{eEl}{m v_{0x}}}{v_{0x}}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{eEl}{m v_{0x}^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta - \frac{eEl}{m v_{0x}^2}$$

Између плоча равног кондензатора (d) на који је прикључен напон U, улеће кроз отвор на доњој плочи сноп електрона под углом од θ. На растојању L од отвора налази се други отвор. Израчунати енергију коју електрони морају имати да би у свом кретању прошли кроз други отвор.



$$E = \frac{U}{d}$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$$

$$\vec{F} = -e E_0 \vec{e}_y$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -eE_0$$

1° $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

2° $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_0$

1° $\frac{dv_x}{dt} = 0$

$$v_x = const$$

$$t=0 \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$$

$$x = v_0 t \cos\theta$$

2° $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_0$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m}E_0$$

$$v_y = -\frac{e}{m}E_0 t + c$$

$$t=0 \quad v_y = v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$v_y = -\frac{e}{m}E_0 t + v_0 \sin\theta$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}E_0 t^2 + v_0 t \sin\theta$$

$$x = L$$

$$y = 0$$

$$L = v_0 t \cos\theta$$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}E_0 t^2 + v_0 t \sin\theta$$

$$t = \frac{L}{v_0 \cos\theta}$$

$$\frac{1}{2}\frac{e}{m}E_0 \frac{L^{\cancel{2}}}{v_0^2 \cos^{\cancel{2}}\theta} = \frac{\cancel{v_0} \cancel{L} \sin\theta}{\cancel{v_0} \cancel{\cos\theta}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{e}{m}E_0 \frac{1}{v_0^2} = \sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{1}{2} e E_0 = m v_0^2 \sin\theta\cos\theta \quad \Big| \frac{1}{2}$$

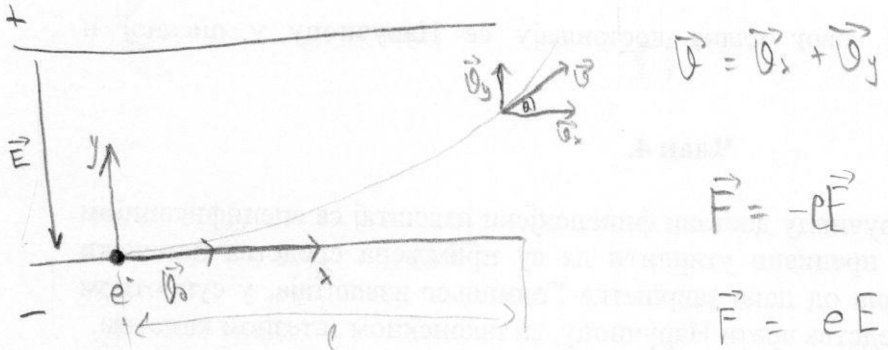
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{4}\frac{e E_0}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{e E_0}{2\sin 2\alpha}$$

$$E_{k0} = \frac{e E_0}{2\sin 2\alpha}$$

6 Нека се електрон креће дуж X осе брзином $\vec{\vartheta}_0$, у електричном пољу $\vec{E}$ равног кондензатора. Израчунати угао θ за који електрон скрене у односу на почетни правац где пролази кроз кондензатор дужине l.



$$\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_x + \vec{\vartheta}_y$$

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

$$\vec{F} = eE\vec{e}_y$$

$$\vec{E} = -E\cdot\vec{e}_y$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta_x}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = eE$$

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = 0$$

$$m\frac{d\vartheta_y}{dt} = eE$$

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vartheta_y}{dt} = \frac{e}{m}E$$

$$\vartheta_x = \text{Const}$$

$$d\vartheta_y = \frac{e}{m}E\,dt$$

$$t=0 \quad \vartheta_x = \vartheta_0$$

$$\text{const} = \vartheta_0$$

$$\vartheta_x = \vartheta_0$$

$$\int d\vartheta_y = \frac{e}{m}E\int dt + C$$

$$\vartheta_y = \frac{e}{m}Et + C$$

$$t=0,\ \vartheta_y = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{\vartheta_y = \frac{e}{m}Et \qquad \vartheta_x = \vartheta_0}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta_x}$$

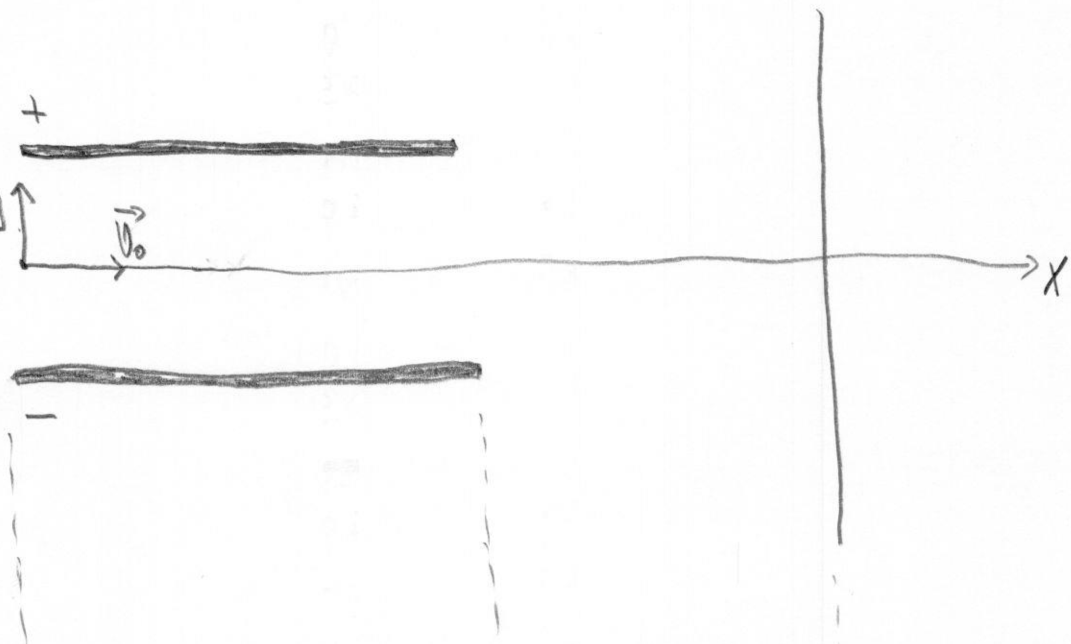
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{e}{m}Et}{\vartheta_0}$$

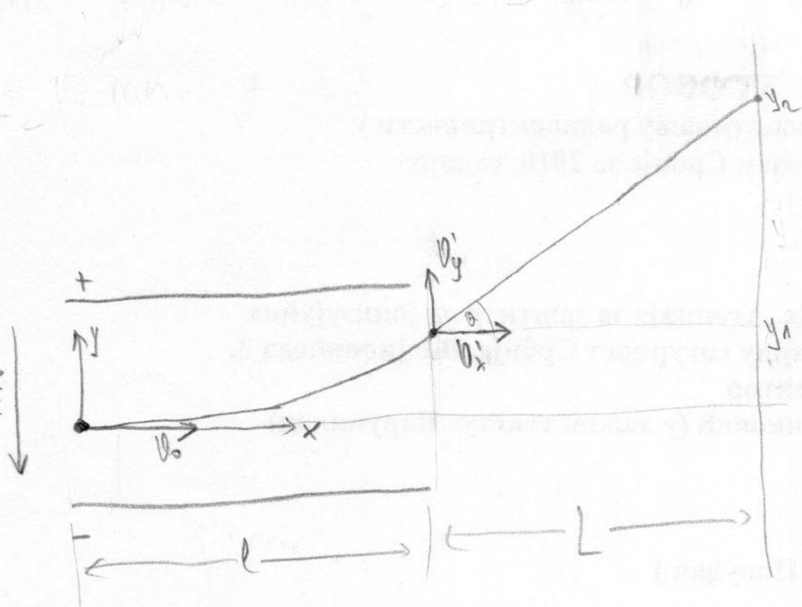
$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{eEt}{m\vartheta_0}}$$

$$t = \frac{l}{\vartheta_0}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{eEl}{m\vartheta_0^2}}$$

Млаз електрона је усмерен између плоча равног кондензатора између којих влада потенцијална разлика U. Брзина којом електрони улазе у простор кондензатора је v_0 у правцу нормалном на електрично поље. Дужина плоча кондензатора је l, а почетна брзина је довољна да електрони пређу растојање l и напусте кондензатор. На растојању L од кондензатора постављен је екран. Одредити тачку на екрану у којој се детектују електрони. Ефекте крајева кондензатора занемарити.





$$E = \frac{U}{d}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\vec{E} = -E\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = eE\vec{e}_y$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = eE$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{e}{m}Et \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}Et$$

$$dx = v_0 dt$$

$$dy = \frac{e}{m}E t\, dt$$

$$\int dx = v_0\int dt + C_1$$

$$\int dy = \frac{e}{m}E\int t\, dt + C_2$$

$$x = v_0 t + C_1$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2 + C_2$$

$t=0 \quad x=0 \quad C_1=0$

$t=0 \quad y=0 \quad C_2=0$

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$$

$x = l$

$$t = \frac{l}{v_0}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$v_x' = v_0$$

$$v_y' = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

$$v_x = const$$

$$v_y = const$$

$$v_x = v_x'$$

поч умов

$$v_y = v_y'$$

$$v_x = v_x' = v_0$$

$$v_y = v_y'$$

$$v_x = v_0$$

$$v_y = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}$$

$$x = v_0 t + C$$

$$y = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}t + C$$

$$t = \frac{l}{v_0};\ x = l$$

$$l = v_0\frac{l}{v_0} + C$$

$$C = 0$$

$$t = \frac{l}{v_0};\ y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2} = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}\frac{l}{v_0} + C$$

$$C = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}t - \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$(l+L) = v_0 t_L$$

$$t_L = \frac{L+l}{v_0}$$

$$y_2 = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}\frac{L+l}{v_0} - \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$y_2 = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0^2}\left(L+l-\frac{1}{2}l\right) = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0^2}\left(L+\frac{1}{2}l\right)$$

$$tg\theta = \frac{y_2-y_1}{L}$$

$$tg\theta = \frac{v_y'}{v_x'}$$

$$\frac{y_2-y_1}{L} = \frac{v_y'}{v_x'}$$

$$y_2 - y_1 = L\frac{v_y'}{v_x'}$$

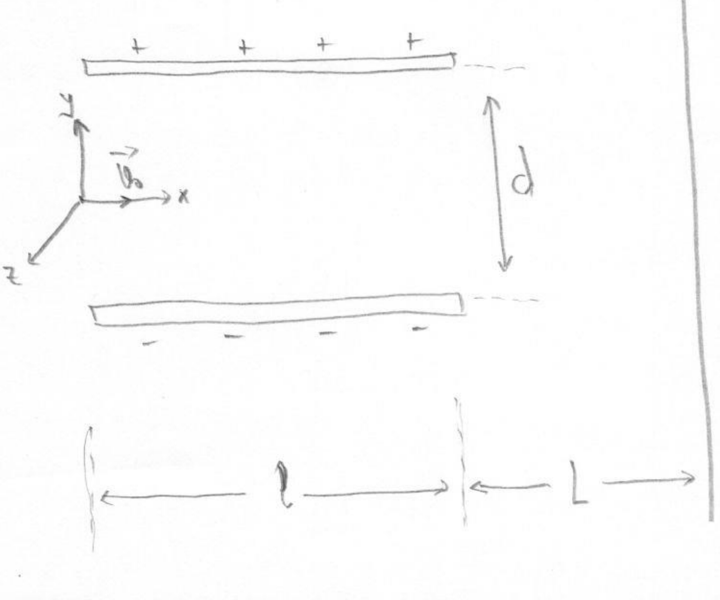
$$y_2 - y_1 = L\frac{\frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}}{v_0} = \frac{e}{m}E\frac{lL}{v_0^2}$$

$$y_2 = \frac{e}{m}E\frac{lL}{v_0^2} + \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$y_2 = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0^2}\left(L+\frac{1}{2}l\right)$$

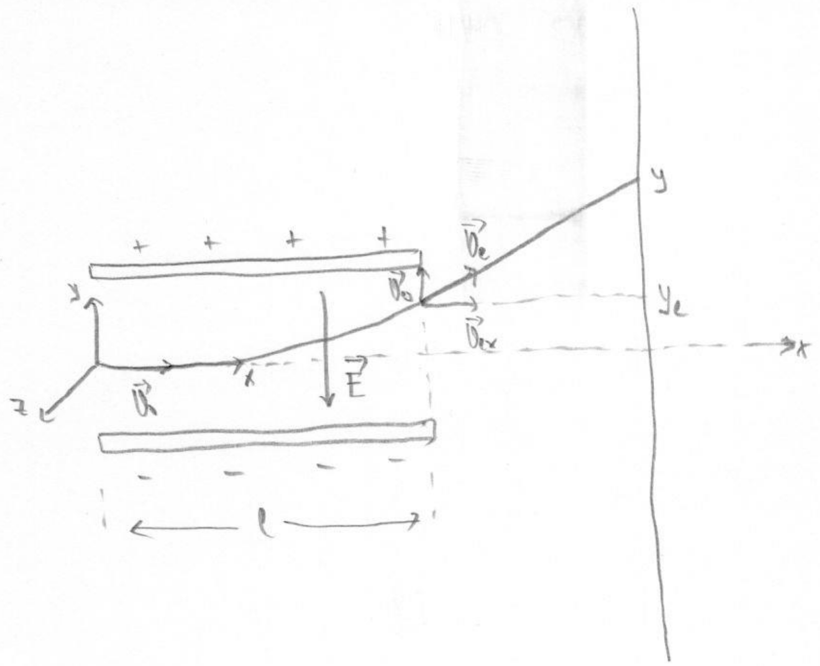
Задатак

Млаз електрона је усмерен између плоча равног кондензатора између којих влада потенцијална разлика U. Брзина којом електрони улазе у простор између кондензатора је $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, као на слици. Дужина плоча кондензатора је l, а почетна брзина је довољна да електрони напусте кондензатор. На растојању L од кондензатора постављен је екран. Одредити тачку на екрану у којој се детектују електрони. Ефекте крајева кондензатора занемарити. Одредити тачку на екрану у којој би се детектовали електрони, уколико се у простору између кондензатора и екрана укључи константно и хомогено магнетно поље, индукције $\vec{B} = B\vec{e}_x$.



Решење:

а) $B=0$



- Између плоча кондензатора

$$\vec{E} = -E\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = -e\cdot\vec{E}$$

$$\vec{F} = eE\vec{e}_y$$

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = eE \qquad m\ddot{z} = 0$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = \frac{e}{m}E \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\upsilon_x = C_1 \qquad \upsilon_y = \frac{e}{m}Et + C_2 \qquad \upsilon_z = C_3$$

$t=0 \quad \upsilon_x = \upsilon_0$

$C_1 = \upsilon_0 \,;\, C_2 = 0 \,;\, C_3 = 0$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \qquad \upsilon_y = \frac{e}{m}Et \qquad \upsilon_z = 0$$

$$\dot{x} = \upsilon_0 \qquad \dot{y} = \frac{e}{m}Et \qquad \dot{z} = 0$$

$$x = \upsilon_0 t + C_4 \qquad y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2 + C_5 \qquad z = C_6$$

$t=0 \quad \vec{r} = (0,0,0)$

$C_4 = 0 \,,\, C_5 = 0 \,,\, C_6 = 0$

$$x = \upsilon_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$$

$$z = 0$$

– Између кондензатора и екрана $\vec{E}=0$, $\vec{F}=0 \Rightarrow$ равномерно праволинијско кретање.

На изласку из кондензатора $\bar{e}$ има v_{ex}, v_{ey}, v_{ez} и x_e, y_e, z_e

$x_e = l$, $v_{ex} = v_0$ $\qquad y_e = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E t_e^2$ $\qquad z_e = 0$

$v_{ex} = \frac{x_e}{t_e}$ $\qquad v_{ye} = \frac{e}{m}E t_e$ $\qquad v_{ze} = 0$

$$t_e = \frac{l}{v_0}$$

$$\vec{v}_e = \left(v_0, \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}, 0\right)$$

$$\vec{r}_e = \left(l, \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}, 0\right)$$

До екрана по x-оси $\bar{e}$ треба да пређе растојање L, брзином v_0

$t_L = \frac{L}{v_0}$, где је t_L време за које $\bar{e}$ пређе L по x-оси.

$$x = l + L$$

$$y = y_e + v_{ye}\cdot t_L = y_e + \frac{e}{m}E t_e \cdot t_L = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E t_e^2 + \frac{e}{m}E t_e t_L =$$

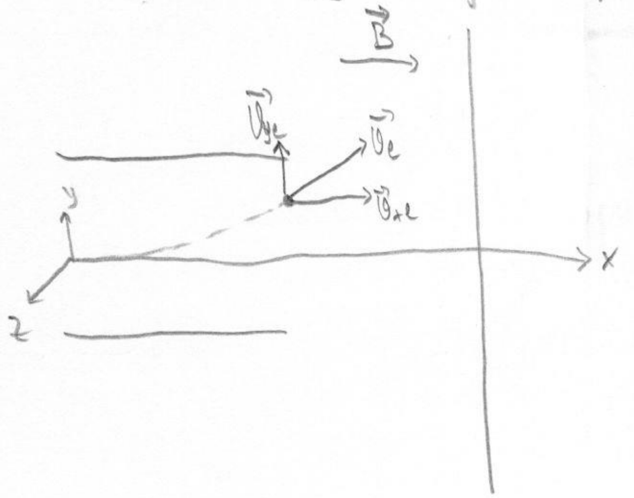
$$= \frac{e}{m}E t_e\left(\frac{1}{2}t_e + t_L\right) = \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}\left(\frac{1}{2}\frac{l}{v_0} + \frac{L}{v_0}\right) = \frac{e}{m}E\frac{l^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{2L}{l}\right)$$

$$z = z_e + v_{ze}\cdot t_L = 0 + 0\cdot t_L = 0$$

Тачка у којој се детектују $\bar{e}$ има координате

$$\left(l+L, \frac{e}{m}E\frac{l^2}{2v_0^2}\left(1+\frac{2L}{l}\right), 0\right)$$

б) $\vec{B} = B\vec{e}_x$ између кондензатора и екрана



Почетни услови при изласку из кондензатора $(t=0)$

$$\vec{r}_0' = \left(l, \frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{l^2}{v_0^2}, 0\right) \equiv (x_0', y_0', z_0')$$

$$\vec{v}_0' = \left(v_0, \frac{e}{m}E\frac{l}{v_0}, 0\right) \equiv (v_{0x}', v_{0y}', v_{0z}')$$

$$\vec{B} = B\vec{e}_x$$

$$\vec{F} = -e\vec{v}\times\vec{B} = -e\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e(0-0)\vec{e}_x - eBv_z\vec{e}_y + eBv_y\vec{e}_z$$

$$\vec{F} = (0, eBv_z, eBv_y)$$

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -eBv_z$$
$$m\ddot{z} = eBv_y$$

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = -\frac{eB}{m}v_z$$
$$\ddot{z} = \frac{eB}{m}v_y$$

$$\omega = \frac{eB}{m}$$

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = -\omega v_z$$
$$\ddot{z} = \omega v_y$$

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = -\omega\dot{z}$$
$$\ddot{z} = \omega\dot{y}$$

$$\dot{x} = C_1$$
$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -\omega\frac{dz}{dt}$$
$$\ddot{z} = \omega\dot{y}$$

$$t=0 \quad C_1 = \dot{x}_0'$$

$$\dot{x} = v_0$$
$$\int d\dot{y} = -\omega\int dz + C_2$$
$$\ddot{z} = \omega\dot{y}$$

$$\dot{x} = v_0$$
$$\dot{y} = -\omega z + C_2$$
$$\ddot{z} = \omega\dot{y}$$

$$t=0 \quad C_2 = v_{0y}'$$
$$z = z_0' = 0 \quad \dot{y} = \dot{y}_0' = v_{0y}'$$

$$\dot{x} = v_0$$

$$\dot{y} = -\omega z + v_{0y}'$$

$$\ddot{z} = \omega \dot{y}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z + \omega v_{0y}'$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \omega v_{0y}'$$

$$z = z_h + z_p$$

$$z_h = A \sin\omega t + B \cos\omega t$$

$$z_p = C$$

Заменом у диф.-jну:

$$\omega^2 z_p = \omega v_{0y}'$$

$$z_p = \frac{v_{0y}'}{\omega}$$

$$z = A \sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{v_{0y}'}{\omega}$$

$t=0 \quad z = z_0' = 0$

$$0 = B + \frac{v_{0y}'}{\omega}$$

$$B = -\frac{v_{0y}'}{\omega}$$

$$z = A \sin\omega t - \frac{v_{0y}'}{\omega} \cos\omega t + \frac{v_{0y}'}{\omega}$$

$$\dot{z} = \omega A \cos\omega t + v_{0y}' \sin\omega t$$

$t=0 \quad \dot{z} = \dot{z}_0' = v_{0z}' = 0$

$$0 = \omega A$$

$$A = 0$$

$$z(t) = \frac{v_{0y}'}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

$$\dot{y} = -\omega z + v_{0y}'$$

$$\dot{y} = -v_{0y}'(1-\cos\omega t) + v_{0y}'$$

$$\dot{y} = \cancel{-v_{0y}'} + v_{0y}' \cos\omega t + \cancel{v_{0y}'}$$

$$\dot{y} = v_{0y}' \cos\omega t$$

$$y = \frac{1}{\omega} v_{0y}' \sin\omega t + C_3$$

$t=0 \quad y = y_0' \Rightarrow C_3 = y_0'$

$$y(t) = \frac{v_{0y}'}{\omega} \sin\omega t + y_0'$$

$$\dot{x} = v_0$$

$$x = v_0 t + C_4$$

$t=0 \quad x = x_0' \Rightarrow C_4 = x_0'$

$$x(t) = v_0 t + x_0'$$

По x-оси e^- се крећу константном брзином v_0.

Растојање L пређе за време $\frac{L}{v_0}$

Тачка на екрану $\left| t = \frac{L}{v_0} \right)$

$$x_E = v_0 \frac{L}{v_0} + x_0'$$

$$x_0' = l$$

$$x_E = L + l$$

$$x_E = l + L$$

$$y_E = \frac{v_{0y}'}{\omega} \sin \omega \frac{L}{v_0} + y_0'$$

$$y_E = \frac{1}{\omega} \frac{e}{m} E \frac{l}{v_0} \sin\left(\omega \frac{L}{v_0}\right) + \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \frac{l^2}{v_0^2}$$

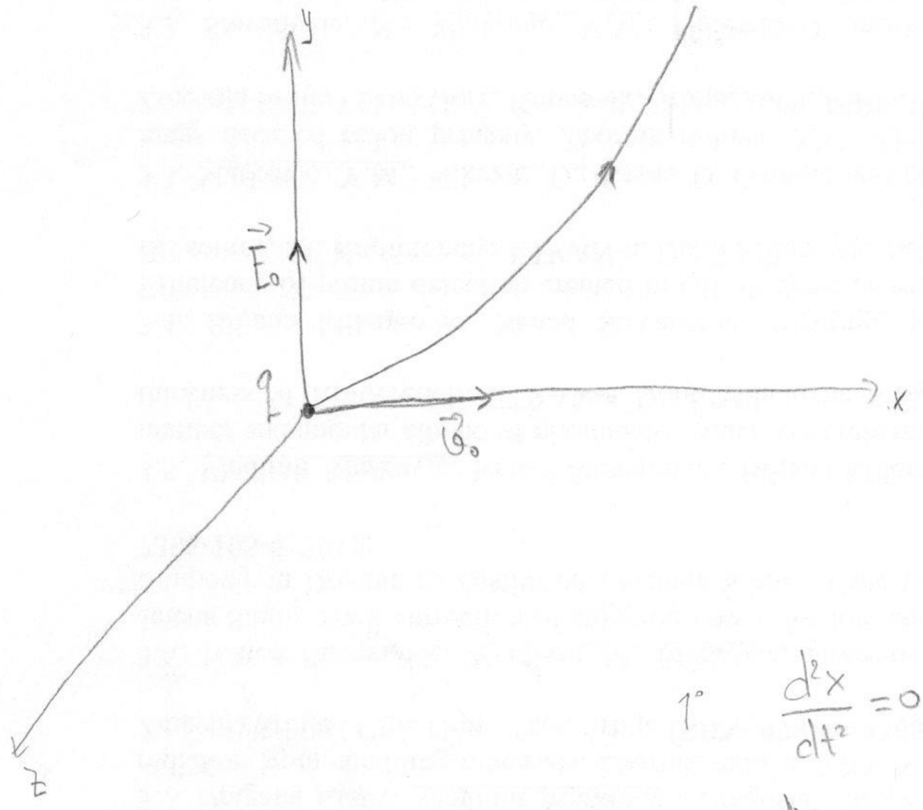
$$z_E = \frac{v_{0z}'}{\omega} \left(1 - \cos\left(\omega \frac{L}{v_0}\right)\right)$$

$$z_E = \frac{1}{\omega} \frac{e}{m} E \frac{l}{v_0} \left(1 - \cos\left(\omega \frac{L}{v_0}\right)\right)$$

$$\alpha = \frac{eE}{m}$$

$$T_E \left(l + L,\ \frac{\alpha}{\omega} \frac{l}{v_0} \sin\left(\omega \frac{L}{v_0}\right) + \frac{\alpha}{2} \frac{l^2}{v_0^2},\ \frac{\alpha}{\omega} \frac{l}{v_0} \left(1 - \cos\left(\omega \frac{L}{v_0}\right)\right) \right)$$

Исписати једначине кретања електрона који улеће у хомогено ел. поље, брзином v_0 која је нормална на то поље.



$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_e$$

1° $\frac{md^2x}{dt^2} = 0$

2° $\frac{md^2y}{dt^2} = qE$

3° $\frac{md^2z}{dt^2} = 0$

1° $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} = 0$

$v_x = C_1$

$t = 0 \quad v_x = v_0$

$v_x = v_0$

$\frac{dx}{dt} = v_0$

$dx = v_0 dt \int$

$x = v_0 t + C_2$

$t = 0 \ ; \ x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\boxed{x = v_0 t}$

равномерно кретање

2° $m\frac{dy^2}{dt^2} = qE$

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{qE}{m}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{qE}{m}$$

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{qE}{m}dt \quad \Big/\int$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int \frac{qE}{m}dt$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{qE}{m}t + C_3$$

$$t=0 \;;\; \vartheta_y = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \vartheta_y = \frac{qE}{m}t$$

$$dy = \frac{qE}{m}t\,dt \quad \Big/\int$$

$$\int dy = \int \frac{qE}{m}t\,dt$$

$$y = \frac{qE}{m}\frac{1}{2}t^2 + C$$

$$t=0 \quad y=0 \Rightarrow C=0$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

једначина параболе

3° $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\vartheta_z}\Big) = 0$$

$$\frac{d\vartheta_z}{dt} = 0$$

$$\vartheta_z = const$$

$$t=0 \quad \vartheta_z = 0 \Rightarrow const = 0$$

$$\vartheta_z = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$z = const$$

$$t=0 \quad z=0 \Rightarrow const = 0$$

$$z = 0$$

Нема кретања дуж z осе

само у xOy равни

$$x = \vartheta_0 t$$

$$\underline{y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2}$$

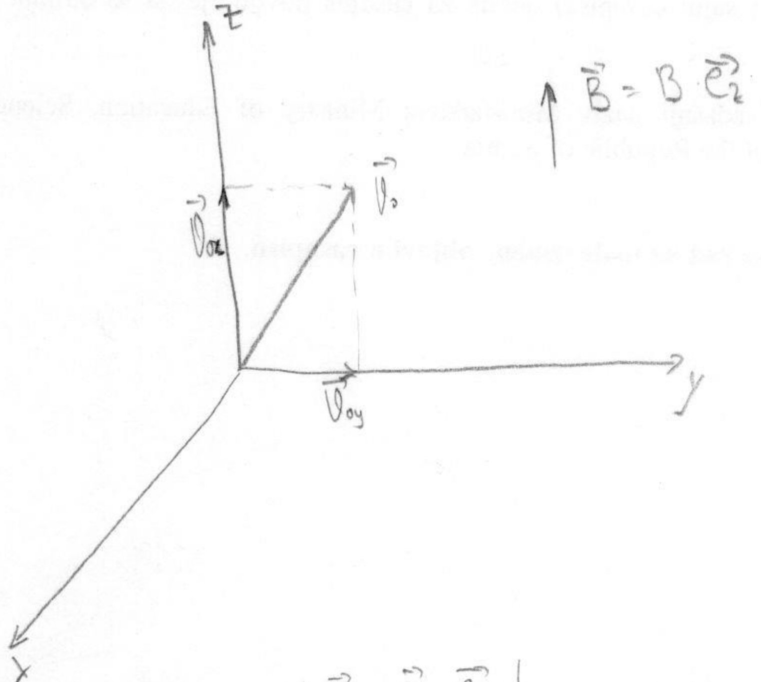
$$t = \frac{x}{\vartheta_0}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{x^2}{\vartheta_0^2}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m\vartheta_0^2}x^2$$

$$x^2 = 2\underbrace{\left(\frac{m\vartheta_0^2}{qE}\right)}_{p}y \qquad x^2 = 2py$$

Написати једначине кретања наелектрисане честице чије је наелектрисање q, ако улети у хомогено магнетно поље магнетне индукције $\vec{B}$. Честица се у почетном тренутку налазила у координатном почетку и имала брзину ϑ_0 у yOz равни. Вектор индукције магнетног поља је усмерен дуж z осе.



$$\vec{F} = q\,\vec{\vartheta}\times\vec{B} = q\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \vartheta_x & \vartheta_y & \vartheta_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q\left[\vec{e}_x(\vartheta_y B - \vartheta_z 0) - \vec{e}_y(\vartheta_x B - \vartheta_z\cdot 0) + \vec{e}_z(\vartheta_x 0 - \vartheta_y 0)\right]$$

$$\vec{F} = q\vartheta_y B\,\vec{e}_x - q\vartheta_x B\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{1}\vec{F}_i \quad\rightarrow\quad 1^\circ\ m\frac{d^2x}{dt^2} = q\vartheta_y B$$

$$2^\circ\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -q\vartheta_x B$$

$$3^\circ\ m\frac{d^2z}{dt^2}$$

1° $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = q v_y B$

2° $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -q v_x B$

3° $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} v_y B \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{q}{m} v_x B \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB}{m}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{qB}{m}\frac{dy}{dt} \,\Big|\, dt$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{qB}{m} dy \,\Big/\!\!\int$$

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{qB}{m}\int dy + C$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qB}{m} y + C$$

$$v_x = \frac{qB}{m} y + C$$

$$t=0 \quad v_x = v_{0x} = 0$$

$$v_x = \frac{qB}{m} y$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qB}{m} y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB}{m}\frac{qB}{m} y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

хомогена диф јна са const коеф

$$y = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2$$

$$\dot{x} = \lambda$$

$$x = 1$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \sqrt{-\omega^2}$$

$$\lambda = \pm i\omega$$

$$y = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$$

$$y = C_1 (\cos\omega t + i \sin\omega t) + C_2 (\cos\omega t - i \sin\omega t)$$

$$y = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_A} \cos\omega t + \underbrace{i (C_1 - C_2)}_{C_B} \sin\omega t$$

$$y = C_A \cos\omega t + C_B \sin\omega t$$

$t = 0 \quad y = 0$

$$0 = C_A$$

$$y = C_B \sin\omega t \,\Big|'$$

$$\frac{dy}{dt} = C_B \omega \cos\omega t$$

$t = 0 \quad v_y = v_{oy}$

$$v_{oy} = C_B \omega$$

$$C_B = \frac{v_{oy}}{\omega}$$

$$y = \frac{v_{oy}}{\omega} \sin\omega t$$

$$y = \frac{v_o}{\omega} \cos\theta \sin\omega t$$

$$y = \frac{m v_o}{qB} \cos\theta \sin\left(\frac{qB}{m} t\right)$$

$$y = \frac{m v_{oy}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qB}{m} y$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega y$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega \frac{v_0}{\omega} \cos\theta \sin \omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta \sin \omega t$$

$$dx = v_0 \cos\theta \sin \omega t \, dt \Big| \int$$

$$\int dx = v_0 \cos\theta \int \sin \omega t \, dt + C$$

$$x = -v_0 \cos\theta \frac{1}{\omega} \cos \omega t + C$$

$$t = 0 \quad x = 0$$

$$0 = -v_0 \cos\theta \frac{1}{\omega} + C$$

$$C = \frac{v_0}{\omega} \cos\theta$$

$$x = -\frac{v_0}{\omega} \cos\theta \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cos\theta$$

$$x = \frac{v_0}{\omega} \cos\theta \left(1 - \cos \omega t\right)$$

$$x = \frac{v_0}{\frac{qB}{m}} \cos\theta \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t\right)$$

$$x = \frac{m v_{0x}}{qB} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t\right)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0$$

$$v_z = const$$

$$v_z = v_{z0}$$

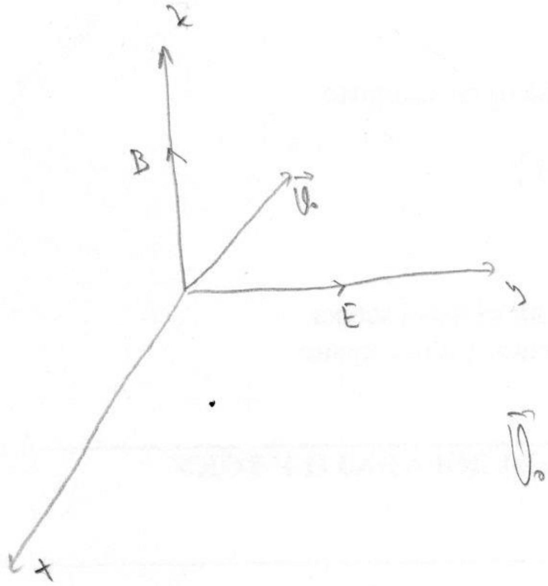
$$\frac{dz}{dt} = v_{z0}$$

$$dz = v_{z0} dt$$

$$z = v_{z0} t + C_1$$

$$z = v_{z0} t$$

Написати једначине кретања наелектрисане честице у стационарном хомогеном магнетном пољу и електричном пољу које се мења са временом $E = E_0 \cos \omega t$, при чему је магнетно поље нормално на електрично поље.



$$\vec{v}_0 : (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$$

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = q E_0 \cos \omega t \, \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qBv_y \vec{e}_x - qBv_x \vec{e}_y$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qBv_y$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -qBv_x + qE_0 \cos \omega t$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qB\vartheta_y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dy}{dt} \Big| dt$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{qB}{m}dy \Big| \int$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qB}{m}y + C$$

$$t=0 \quad y=0 \quad \vartheta_x = \vartheta_{0x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qB}{m}y + \vartheta_{0x}$$

$$\vartheta_x = \frac{qB}{m}y + \vartheta_{0x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -qB\vartheta_x + qE_0\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -qB\left(\frac{qB}{m}y + \vartheta_{0x}\right) + qE_0\cos\omega t \Big| m$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y - \frac{qB}{m}\vartheta_{0x} + \frac{qE_0}{m}\cos\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = -\frac{qB}{m}\vartheta_{0x} + \frac{qE_0}{m}\cos\omega t$$

$$y = y_{hom} + y_{part1} + y_{part2}$$

$$y_{hom} = C_1\cos\frac{qB}{m}t + C_2\sin\frac{qB}{m}t$$

$$y_{part1} = A$$

$$\frac{d^2y_{part1}}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y_{part1} = -\frac{qB}{m}\vartheta_{0x}$$

$$\left(\frac{qB}{m}\right)^{\cancel{2}} A = -\frac{\cancel{qB}}{m}\vartheta_{0x}$$

$$A = -\frac{m\vartheta_{0x}}{qB}$$

$$y_{part1} = -\frac{m\vartheta_{0x}}{qB}$$

Карактеристична ј-на:

$$r^2 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i\frac{qB}{m}$$

$$r_{1,2} = \alpha + i\frac{qB}{m}$$

$$f(x) = e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t)$$

$$r_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$$

Партикуларно решеое тражимо у облику

$$y_p = Ae^{\alpha x}\sin\beta x + Be^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_{pant2} = C_A' \cos \omega t + C_B' \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 y_{pant2}}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} y_{pant2} = \frac{q E_0}{m} \cos \omega t$$

$$-C_A' \omega^2 \cos \omega t - C_B' \omega^2 \sin \omega t + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \left(C_A' \cos \omega t + C_B' \sin \omega t\right) = \frac{q E_0}{m} \cos \omega t$$

$$\underbrace{\left(-C_A' \omega^2 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 C_A'\right)}_{= \frac{qE}{m}} \cos \omega t + \underbrace{\left(-C_B' \omega^2 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 C_B'\right)}_{=0} \sin \omega t = \frac{qE}{m} \cos \omega t$$

$$C_A' \left(\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2\right) = \frac{qE}{m} \qquad C_B' \left(\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2\right) = 0$$

$$C_B' = 0$$

$$C_A' = \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}$$

$$y_{pant2} = \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

$$y = y_h + y_{pant1} + y_{pant2}$$

$$y = C_A \cos \frac{qB}{m} t + C_B \sin \frac{qB}{m} t - \frac{m_0 v_{0x}}{qB} + \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

$$y(0) = 0$$

$$0 = C_A - \frac{m v_{0x}}{qB} + \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}$$

$$C_A = \frac{m v_{0x}}{qB} - \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}$$

$$y = \left(\frac{mv_{0x}}{qB} - \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}\right)\cos\frac{qB}{m}t + C_B \sin\frac{qB}{m}t - \frac{m_0 v_{0x}}{qB} + \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

$$y'(0) = v_y(0) = v_{0y}$$

$$v_y = -\left(\frac{mv_{0x}}{qB} - \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}\right)\frac{qB}{m}\sin\frac{qB}{m}t + C_B\frac{qB}{m}\cos\frac{qB}{m}t - \omega\frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

$$v_y(0) = v_{0y}$$

$$v_{0y} = C_B\frac{qB}{m}$$

$$C_B = \frac{mv_{0y}}{qB}$$

$$y = \left(\frac{mv_{0x}}{qB} - \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}\right)\cos\frac{qB}{m}t + \frac{mv_{0y}}{qB}\sin\frac{qB}{m}t - \frac{m_0 v_{0x}}{qB} + \frac{\frac{qE}{m}}{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\Big) = 0$$

$$v_z = C_5$$

$t = 0 \quad v_z = v_{0z}$

$$\rightarrow v_z = v_{0z}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{0z}$$

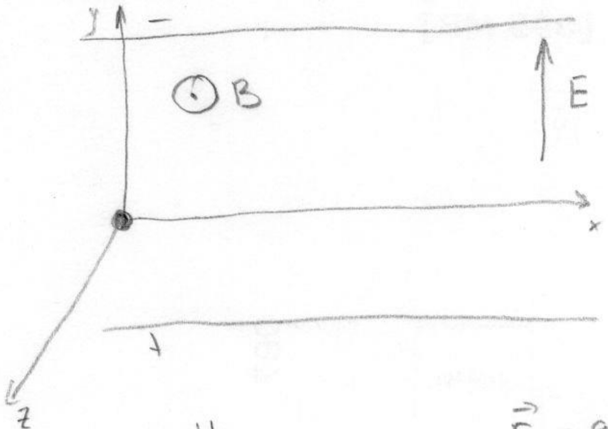
$$z = v_{0z}t + C_6$$

$t = 0 \quad z = 0$

$C_6 = 0$

$$\underline{z = v_{0z}t}$$

Одредити једначине кретања наелектрисане честице у равном кондензатору која је изложена попречном магнетном пољу индукције $\vec{B}$. Потенцијална разлика између плоча је U, а растојање између њих је d. Почетна брзина честице је једнака нули.



$$E = \frac{U}{d}$$

$$\vec{E} = E\,\vec{e_y}$$

$$\vec{B} = B\,\vec{e_z}$$

$$\vec{F_e} = q E \vec{e_y}$$

$$\vec{F_B} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{F_e} + \vec{F_B}$$

$$\vec{F_B} = q \vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q \left(v_y B \vec{e_x} - v_x B \vec{e_y} + 0 \vec{e_z} \right)$$

$$= q v_y B \vec{e_x} - q v_x B \vec{e_y}$$

$$\begin{cases} m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = q B v_y \\[2ex] m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = q E - q B v_x \\[2ex] m \dfrac{d^2 z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qB\vartheta_y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m}B\vartheta_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{q}{m}B\frac{dy}{dt} \quad \Big/ dt$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{q}{m}B\,dy \quad \Big/ \int$$

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{q}{m}B\int dy + C$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m}By + C$$

$$\vartheta_x = \frac{q}{m}By + C$$

$$t=0 \quad y=0 \quad \vartheta_x = 0 \Rightarrow C=0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m}By$$

$$\vartheta_x = \frac{q}{m}By$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = qE - qB\underline{\underline{\vartheta_x}} \quad \Big/ :m$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}\vartheta_x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}\frac{qB}{m}y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = \frac{qE}{m}$$

$$y = y_{hom} + y_{part}$$

hom:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = 0$$

$$y_{hom} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda^2 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{12} = \pm i\frac{qB}{m}$$

$$y_{hom} = C_1 e^{i\frac{qB}{m}t} + C_2 e^{-i\frac{qB}{m}t}$$

$$y_{hom} = C_1\left(\cos\frac{qB}{m}t + i\sin\frac{qB}{m}t\right) + C_2\left(\cos\frac{qB}{m}t - i\sin\frac{qB}{m}t\right)$$

$$y_{hom} = \underbrace{(C_1+C_2)}_{C_A}\cos\frac{qB}{m}t + \underbrace{i(C_1+C_2)}_{C_B}\sin\frac{qB}{m}t$$

$$y_{hom} = C_A\cos\frac{qB}{m}t + C_B\sin\frac{qB}{m}t$$

Опште решење партикуларног дела је:

$$y_p = A$$

$$y_p = A$$

$$\cancel{A''} + \frac{q^2B^2}{m^2}\cdot A = \frac{qE}{\cancel{m}}$$

$$A = \frac{mE}{qB^2}$$

$$y = y_{hom} + y_{par}$$

$$y = C_A \cos\frac{qB}{m}t + C_B \sin\frac{qB}{m}t + \frac{mE}{qB^2}$$

$t=0$, $\cos 0 = 1$ $\sin 0 = 0$ $y=0$

$$0 = C_A + \frac{mE}{qB^2}$$

$$C_A = -\frac{mE}{qB^2}$$

$$y = \frac{mE}{qB^2}\left(1-\cos\frac{qB}{m}t\right) + C_B \sin\frac{qB}{m}t$$

$y(0)=0$

$y'(0) = v_y = 0$

$$\dot{y} = \frac{mE}{qB^2}\left(\sin\frac{qB}{m}t\cdot\frac{qB}{m}\right) + C_B\cos\frac{qB}{m}t\cdot\frac{qB}{m}$$

$t=0$ $\dot{y}=0$

$$0 = 0 + C_B\cdot\frac{qB}{m}$$

$$C_B = 0$$

$$y = \frac{mE}{qB^2}\left(1 - \cos \frac{qB}{m}t\right)$$

$$v_x = \frac{qB}{m} \cdot y$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cancel{qB}}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}E}{\cancel{q}B^{\cancel{2}}}\left(1 - \cos \frac{qB}{m}t\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E}{B} - \frac{E}{B}\cos \frac{qB}{m}t$$

$$\int dx = \int \frac{E}{B}\,dt - \int \frac{E}{B}\cos \frac{qB}{m}t + C_3$$

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{m}{qB}\,\frac{E}{B}\sin \frac{qB}{m}t + C_3$$

$$t=0 \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$$

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{mE}{qB^2}\sin \frac{qB}{m}t$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$v_z = C_4$$

$$t=0 \quad v_{z0}=0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v_z = 0$$

$$z = C_5$$

$$t=0 \quad z_0 = 0$$

$$z = 0$$

Електрон се креће у хомогеном магнетном пољу индукције $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ и радијалном електричном пољу са потенцијалом $\varphi = \frac{U_0}{2R^2}(x^2+y^2)$, где су U_0 и R познате константе. У почетном тренутку времена нека је $x(0) = a\cos\alpha$, $y(0) = a\sin\alpha$, $z(0) = 0$, $\vec{v}(0) = 0$.

Наћи закон кретања електрона уколико је

$$\left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 > \frac{4eU_0}{mR^2}.$$

Решење:

Јачина ел. поља можемо наћи као:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{U_0}{2R^2}(2x + 2y)$$

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$\vec{E} = -\frac{U_0}{R^2}x\vec{e}_x - \frac{U_0}{R^2}y\vec{e}_y$$

$$\vec{v}\times B = Bv_y\vec{e}_x - Bv_x\vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\times\vec{B}$$

$$m\vec{a} = +\frac{eU_0}{R^2}x\vec{e}_x + \frac{eU_0}{R^2}y\vec{e}_y - eBv_y\vec{e}_x + eBv_x\vec{e}_y$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{eU_0}{mR^2}x - \frac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{eU_0}{mR^2}y + \frac{eB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\ddot{x} - \omega_0^2 x + \Omega\dot{y} = 0 \\ &\ddot{y} - \omega_0^2 y - \Omega\dot{x} = 0 \\ &\ddot{z} = 0 \end{aligned}$$

$$\omega_0^2 = \frac{eU_0}{mR^2} \ ; \ \Omega = \frac{eB}{m}$$

Помножимо једну $\ddot{y}$ са i и саберимо са једн. $\ddot{x}$

$$\left(\ddot{x} - \omega_0^2 x + \Omega \dot{y}\right) + i\left(\ddot{y} - \omega_0^2 y - \Omega \dot{x}\right) = 0$$

$$\dot{y} - i\dot{x} = -i\left(-\frac{\dot{y}}{i} + \dot{x}\right) =$$

$$= -i\left(\dot{x} - \frac{\dot{y}}{i}\frac{i}{i}\right) =$$

$$= -i\left(\dot{x} + i\dot{y}\right)$$

$$\left(\ddot{x} + i\ddot{y}\right) - \omega_0^2\left(x + iy\right) + \Omega\left(\dot{y} - i\dot{x}\right) = 0$$

$$\left(\ddot{x} + i\ddot{y}\right) - \omega_0^2\left(x + iy\right) - i\Omega\left(\dot{x} + i\dot{y}\right) = 0$$

$$\xi = x + iy$$

$$\dot{\xi} = \dot{x} + i\dot{y}$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

$$\ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi - i\Omega \dot{\xi} = 0$$

Опште решење је облика:

$$\xi = C e^{i\omega t}$$

$$\dot{\xi} = i\omega C e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 C e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 C e^{i\omega t} - \omega_0^2 C e^{i\omega t} - i\Omega\, i\omega\, C e^{i\omega t} = 0$$

$$-\omega^2 - \omega_0^2 + \Omega\omega = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\omega^2 - \Omega\omega + \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\Omega}{2}\left[1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{2\omega_0}{\Omega}\right)^2}\right]$$

По услову задатка:

$$\Omega > 2\omega_0$$

Подкорена величина је >0

Решења су реална

$$\xi = C e^{i\omega t}$$

$$\xi_1 = C_1 e^{i\omega_1 t} \qquad \xi_2 = C_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$\xi = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t}$$

$t=0$ $\quad \xi(0) = x(0) + i\,y(0)$

$$\xi(0) = a\cos\alpha + i\,a\sin\alpha$$

$$\xi(0) = a e^{i\alpha}$$

$$\dot{\xi}(0) = 0$$

$$\xi_h = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$\dot{\xi}_h = i\omega_1 C_1 e^{i\omega_1 t} + i\omega_2 C_2 e^{i\omega_2 t}$$

$t = 0$

$$a e^{i\alpha} = C_1 + C_2$$

$$0 = i(\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2)$$

$$C_1 + C_2 = a e^{i\alpha}$$

$$\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{\omega_2}{\omega_1} C_2$$

$$-\frac{\omega_2}{\omega_1} C_2 + C_2 = a e^{i\alpha}$$

$$C_2 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = e^{i\alpha}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} e^{i\alpha}}$$

$$C_1 = -\frac{\omega_2}{\cancel{\omega_1}} \frac{\cancel{\omega_1}}{\omega_1 - \omega_2} e^{i\alpha}$$

$$C_1 = -\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} e^{i\alpha}$$

$$\xi = -\frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2} e^{i(\omega_1 t+\alpha)} + \frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2} e^{i(\omega_2 t+\alpha)}$$

$$\dot{\xi} = \frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2} e^{i(\omega_1 t+\alpha)} - \frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2} e^{i(\omega_2 t+\alpha)}$$

$$\xi(t) = x(t) + i\, y(t)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\, \xi$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\, \xi$$

$$x(t) = \frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2} \cos(\omega_1 t+\alpha) - \frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2} \cos(\omega_1 t+\alpha)$$

$$y(t) = \frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2} \sin(\omega_1 t+\alpha) - \frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2} \sin(\omega_1 t+\alpha)$$

Наелектрисање q креће се у хомогеном магнетном пољу индукције $\vec{B}$. Наћи зависност брзине и кинетичке енергије наелектрисане честице од времена, уколико урачунамо утицај силе „трења" (услед зрачења), $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$ и уколико је $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Решење:

Нека је $\vec{B} = B\vec{e}_z$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = B v_y \vec{e}_x - B v_x \vec{e}_y$$

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \times \vec{B}) - \gamma \vec{v}$$

$$\vec{a} = +\frac{qB}{m} v_y e_x - \frac{qB}{m} v_x \vec{e}_y - \gamma v_x \vec{e}_x - \gamma v_y \vec{e}_y - \gamma v_z \vec{e}_z$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega \dot{y} - \frac{\gamma}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} &= -\omega \dot{x} - \frac{\gamma}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} &= -\frac{\gamma}{m}\dot{z} \end{aligned}} \quad \Big| \cdot i \quad +$$

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega(\dot{y} - i\dot{x}) - \frac{\gamma}{m}(\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) - \frac{\gamma}{m}(\dot{x} - i\dot{y})$$

$$v(t) = \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$$

$$\dot{v} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

$$\dot{v} = \left(-i\omega - \frac{\gamma}{m}\right) v$$

$$\dot{U} - \left(-i\omega - \frac{r}{m}\right) U = 0$$

$$\omega' = -\frac{r}{m} - i\omega$$

$$\dot{U} - \omega' U = 0$$

$$\lambda - \omega' = 0$$

$$\lambda = \omega'$$

$$U = C e^{\lambda t}$$

$$U = C e^{\left(-i\omega - \frac{r}{m}\right) t}$$

$$t = 0 \quad U(0) = U_0$$

$$U(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0)$$

$$C = U(0)$$

$$U(t) = U(0)\, e^{-i\omega t - \frac{r}{m} t}$$

$$\ddot{z} = -\frac{r}{m}\dot{z}$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{r}{m}\dot{z}$$

$$\frac{d\dot{z}}{\dot{z}} = -\frac{r}{m} dt$$

$$\ln \dot{z} = -\frac{r}{m} t + C_1$$

$$t = 0 \quad \dot{z} = \dot{z}(0)$$

$$\ln \dot{z}(0) = + C_1$$

$$\ln \dot{z} = -\frac{r}{m} t + \ln \dot{z}(0)$$

$$\ln \frac{\dot{z}}{\dot{z}(0)} = -\frac{r}{m} t$$

$$\dot{z} = \dot{z}(0)\, e^{-\frac{r}{m} t}$$

$$v^2(t) = |U(t)|^2 + \dot{z}^2$$

$$v^2(t) = |U(0)|^2 \left| e^{-i\omega t - \frac{r}{m} t} \right|^2 + \dot{z}(0)\, e^{-2\frac{r}{m} t}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$$

$$v^2(t) = |U(0)|^2 e^{-2\frac{r}{m} t} + \dot{z}(0)\, e^{-2\frac{r}{m} t}$$

$$\vartheta^2(t) = \left(|\mathrm{U}(0)|^2 + \dot{z}^2(0) \right) e^{-2\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\vartheta^2(t) = \left(\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 + \dot{z}(0)^2 \right) e^{-2\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\vartheta^2(t) = \vartheta_0^2 \, e^{-2\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\boxed{\vartheta(t) = \vartheta_0 \, e^{-\frac{\gamma}{m}t}}$$

$$\frac{1}{2} m \vartheta^2(t) = T(t) = \frac{1}{2} m \vartheta_0^2 \, e^{-2\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\boxed{T(t) = T_0 \, e^{-2\frac{\gamma}{m}t}}$$

II Начин:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q_n(\vec{v}\times\vec{B})-\gamma\vec{v} \quad /\cdot\vec{v}$$

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=\underbrace{q\vec{v}(\vec{v}\times\vec{B})}_{0}-\gamma v^2$$

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{\gamma}{m}v^2$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(v^2)=2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=-\frac{\gamma}{m}v^2 \quad /\, m$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-\frac{\gamma}{m}2\cdot\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{dT}{dt}=-2\frac{\gamma}{m}T$$

$$\int\frac{dT}{T}=-2\frac{\gamma}{m}\int dt+C$$

$$\ln T=-2\frac{\gamma}{m}t+C$$

$t=0 \quad T=T(0)$

$$T(0)=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$C=\ln T(0)$$

$$\ln T=-2\frac{\gamma}{m}t+\ln T(0)$$

$$T=T(0)\,e^{-2\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\boxed{T=T_0\,e^{-2\frac{\gamma}{m}t}}$$

У простору где делују електрично поље јачине $\vec{E} = E\vec{e}_y$ и магнетно поље индукције $\vec{B} = B\vec{e}_z$ креће се честица наелектрисања $\frac{q}{m}$. Нека се у почетном тренутку честица налази у координатном почетку са почетном брзином $\vec{v}_0 = \dot{x}_0\vec{e}_x + \dot{y}_0\vec{e}_y$. Наћи једначину трајекторије $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Решење:

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = Bv_y\vec{e}_x - Bv_x\vec{e}_y$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \underbrace{\frac{q}{m}E}_{\alpha}\vec{e}_y + \underbrace{\frac{qB}{m}}_{\omega}v_y\vec{e}_x - \underbrace{\frac{qB}{m}}_{\omega}v_x\vec{e}_y$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega\frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha - \omega\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \omega\frac{dy}{dt}$$

$$\int d\dot{x} = \omega\int dy + C_1$$

$$\dot{x} = \omega y + C_1$$

$$t=0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad y_0 = 0$$

$$C_1 = \dot{x}_0$$

$$\dot{x} = \omega y + \dot{x}_0$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \alpha - \omega \frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{y} = \alpha - \omega(\omega y + \dot{x}_0)$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \alpha - \omega \dot{x}_0$$

$$y_p = C_2$$

$$\omega^2 C_2 = \alpha - \omega \dot{x}_0$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\ddot{y}_h + \omega^2 y_h = 0$$

$$y_h = A \cos\omega t + B \sin\omega t$$

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$t = 0 \quad y = 0$

$$0 = A + \frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega^2}$$

$$y = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega^2}\right)\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$t = 0 \quad \dot{y} = \dot{y}_0$

$$\dot{y} = -\omega\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega^2}\right)\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$$

$$\dot{y}_0 = \omega B$$

$$y = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$y_{(t)} = \frac{\alpha}{\omega^2}\left[1 + \left(\frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha} - 1\right)\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0\omega}{\alpha}\sin\omega t - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)$$

$$y_{(t)} = \frac{\alpha}{\omega^2}\left[\frac{\omega\dot{y}_0}{\alpha}\sin\omega t + \left(1 - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)\left(1 - \cos\omega t\right)\right]$$

$$\dot{x} = \omega y + \dot{x}_0$$

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{\omega^2}\left[\frac{\omega\dot{y}_0}{\alpha}\sin\omega t + \left(1 - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)\left(1 - \cos\omega t\right)\right] + \dot{x}_0$$

$$x = \frac{\alpha}{\omega}\left[-\frac{\dot{y}_0}{\alpha}\cos\omega t + \left(1 - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\right] + \dot{x}_0 t + C_3$$

$t=0$

$$x_0 = \frac{\alpha}{\omega}\left[-\frac{\dot{y}_0}{\alpha}\right] + C_3$$

$$C_3 = \cancel{x_0}^{\,0} + \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

$$C_3 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

$$x = \frac{\alpha}{\omega}\left[-\frac{\dot{y}_0}{\alpha}\cos\omega t - \left(1 - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)\frac{1}{\omega}\sin\omega t + \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}t + \frac{\dot{y}_0}{\alpha}\right]$$

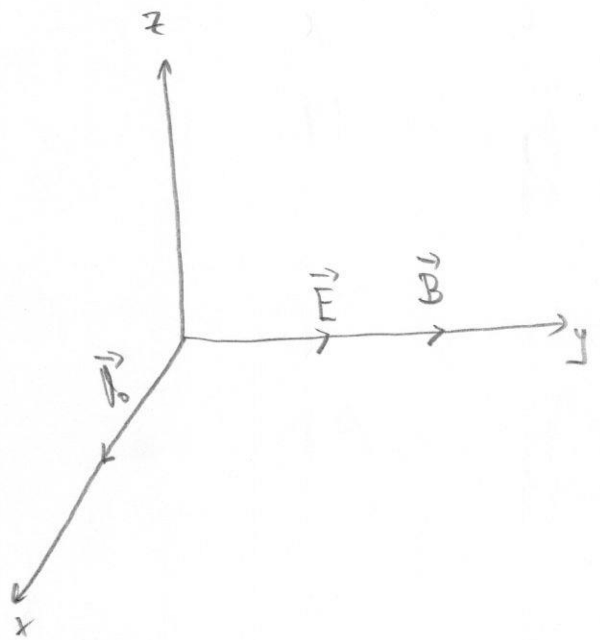
$$x = \frac{\alpha}{\omega^2}\left[-\frac{\omega\dot{y}_0}{\alpha}\cos\omega t - \left(1 - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)\sin\omega t + \frac{\omega^2\dot{x}_0}{\alpha}t + \frac{\omega}{\alpha}\dot{y}_0\right]$$

$$x = \frac{\alpha}{\omega^2}\left[\frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}t - \left(1 - \frac{\omega\dot{x}_0}{\alpha}\right)\sin\omega t + \frac{\omega\dot{y}_0}{\alpha}\left(1 - \cos\omega t\right)\right]$$

циклоида

Протон се креће у простору где истовремено паралелно делују електрично поље $\vec{E}$ и магнетно поље индукције $\vec{B}$. Ако је почетна брзина протона нормална на векторе $\vec{E}$ и $\vec{B}$, наћи једначину трајекторије $x(t), y(t), z(t)$.

Решење:



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = -B\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} = -B\left(v_z\vec{e}_x - v_x\vec{e}_z\right) =$$

$$= -Bv_z\vec{e}_x + Bv_x\vec{e}_z$$

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{F} = eE\vec{e_y} - ev_z B\vec{e_x} + ev_x B\vec{e_z}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{a} = -\frac{eB}{m}v_z\vec{e_x} + \frac{eE}{m}\vec{e_y} + \frac{eB}{m}v_x\vec{e_z}$$

$$\omega = \frac{eB}{m} \qquad \alpha = \frac{eE}{m}$$

$$\vec{a} = -\omega v_z\vec{e_x} + \alpha\vec{e_y} + \omega v_x\vec{e_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega v_z \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \omega v_x \end{aligned}}$$

$t=0$

$x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$v_{0x} = v_0$

$v_{0y} = v_{0z} = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega v_z$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega\frac{dz}{dt}$$

$$\int dv_x = -\omega\int dz + C_1$$

$$v_x = -\omega z + C_1$$

$t=0,\ z_0=0\quad v_{0x}=v_0$

$$v_0 = C_1$$

$$\boxed{v_x = -\omega z + v_0}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega v_x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega(-\omega z + v_0)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z + \omega v_0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = \omega v_0$$

$$z = z(t)$$

$$z'' + \omega^2 z = \omega v_0 \quad (1)$$

$$z = z_h + z_p$$

$$z_h'' + \omega^2 z_h = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega$$

$$z_h = C_2 e^{i\omega t} + C_3 e^{-i\omega t}$$

$$z_h = C_2(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_3(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$z_h = (C_2 + C_3)\cos\omega t + i(C_2 - C_3)\sin\omega t$$

$$C_2 + C_3 = C_4$$

$$i(C_2 - C_3) = C_5$$

$$\boxed{z_h = C_4\cos\omega t + C_5\sin\omega t}$$

$$z_p = ?$$

$$h(t) = \omega v_0 = const$$

$$z_p = C_6$$

Заменом у (1)

$$\omega^2 C_6 = \omega v_0$$

$$\boxed{C_6 = \frac{v_0}{\omega}}$$

$$z = z_h + z_p$$

$$z = C_4\cos\omega t + C_5\sin\omega t + \frac{v_0}{\omega}$$

$$t = 0 \quad z = z_0 = 0$$

$$0 = C_4 + \frac{v_0}{\omega}$$

$$C_4 = -\frac{v_0}{\omega}$$

$$z = -\frac{v_0}{\omega}\cos\omega t + C_5\sin\omega t + \frac{v_0}{\omega} \quad \Big|'$$

$$v_z = +\frac{v_0}{\omega}\omega\sin\omega t + \omega C_5\cos\omega t$$

$$t = 0 \quad v_z = v_{z0} = 0$$

$$0 = 0 + \omega C_5$$

$$C_5 = 0$$

$$\boxed{z = \frac{v_0}{\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

$$v_x = -\omega z + v_0$$

$$z = \frac{v_0}{\omega}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

$$v_x = -\cancel{\omega} \cdot \frac{v_0}{\cancel{\omega}}\left(1 - \cos\omega t\right) + v_0$$

$$v_x = -v_0 + \cos\omega t + v_0$$

$$\boxed{v_x = \cos\omega t}$$

$$\int dx = v_0 \int \cos\omega t \, dt + C_6$$

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t + C_6$$

$$t = 0 \quad x_0 = 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha$$

$$\frac{d v_y}{dt} = \alpha$$

$$\int d v_y = \alpha \int dt + C_7$$

$$v_y = \alpha t + C_7$$

$$t = 0 \quad v_y = v_{y0} = 0 \Rightarrow C_7 = 0$$

$$\boxed{v_y = \alpha t}$$

$$\int dy = \alpha \int t \, dt + C_8$$

$$y = \frac{1}{2} \alpha t^2 + C_9$$

$$t = 0 \quad y = y_0 = 0 \Rightarrow C_9 = 0$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

Протон се креће у простору где делују узајамно нормална хомогена променљива електрична поља:

$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_1 \cos \omega t$ и

$\vec{E}_2 = \vec{e}_y E_2 \sin \omega t$.

При каквим почетним условима и вредностима амплитуда E_1 и E_2 трајекторија протона ће бити обична циклоида?

Решење:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{e}_x E_1 \cos \omega t + q\vec{e}_y E_2 \sin \omega t$$

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{qE_1}{m}\vec{e}_x \cos \omega t + \frac{qE_2}{m}\vec{e}_y \sin \omega t \quad \Big/ \int$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{qE_1}{m\omega}\vec{e}_x \sin \omega t - \frac{qE_2}{m\omega}\vec{e}_y \cos \omega t + \vec{C}_1$$

$$d\vec{r} = \frac{qE_1}{m\omega}\vec{e}_x \sin \omega t \, dt - \frac{qE_2}{m\omega}\vec{e}_y \cos \omega t \, dt + \vec{C}_1 dt \quad \Big/ \int$$

$q = e$

$$\boxed{\vec{r} = -\frac{eE_1}{m\omega^2}\vec{e}_x \cos \omega t - \frac{eE_2}{m\omega^2}\vec{e}_y \sin \omega t + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2}$$

$\vec{C_1} = (C_{1x}, C_{1y}, C_{1z})$

$\vec{C_2} = (C_{2x}, C_{2y}, C_{2z})$

Трајекторија ће бити циклоида у равни $z = z_0$ ако је

$\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$

$E_1 = E_2$

$$x = -\frac{eE_1}{m\omega^2}\cos\omega t + C_{1x}t + C_{2x}$$

$t = 0 \quad x = x_0$

$$x_0 = -\frac{eE_1}{m\omega^2} + C_{2x}$$

$$C_{2x} = x_0 + \frac{eE_1}{m\omega^2}$$

$$x = \frac{eE_1}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + C_{1x}t + x_0$$

$$\dot{x} = \frac{eE_1}{m\omega^2}\omega\sin\omega t + C_{1x} + x_0$$

$t = 0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0$

$\dot{x}_0 = C_{1x}$

$$\boxed{x = \frac{eE_1}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \dot{x}_0 t + x_0}$$ аналогно:

$$\boxed{y = \frac{eE_1}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t) + \dot{y}_0 t + y_0}$$

$$\boxed{z = \dot{z}_0 t + z_0}$$